

Geometría I

Examen II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción 1^a Prueba. Temas 1 y 2.

Fecha 3 de diciembre de 2021.

Duración 90 minutos.

Ejercicio 1. En el espacio vectorial \mathbb{R}^4 , se consideran los subconjuntos

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0\},$$

$$W = \mathcal{L}(\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\}).$$

1. [1 punto] Demuestra que U es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .

Obtengo unas ecuaciones paramétricas de U :

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_i = x_i \quad i = 2, 3, 4 \end{array} \right\} \\ &= \{(2x_3 - 2x_4, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\} \end{aligned}$$

Sea $u, u' \in U$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Para ver que es un subespacio vectorial, comprobemos que $au + au' \in U$.

$$\begin{aligned} au + bu' &= a(2(x_3 - x_4), x_2, x_3, x_4) + b(2(x'_3 - x'_4), x'_2, x'_3, x'_4) = \\ &= (2(ax_3 + bx'_3) - 2(ax_4 + bx'_4), ax_2 + bx'_2, ax_3 + bx'_3, ax_4 + bx'_4) \in U \end{aligned}$$

Como $au + au' \in U$, tenemos que U es cerrado para sumas y producto por escalares, por lo que es un subespacio vectorial.

2. [1 punto] Calcula una base \mathcal{B}_U de U .

Sea $(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1) \in U$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = -3 \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \neq 0 \implies \text{rg}(A) = 3$$

Por tanto, esos tres vectores son linealmente independientes en \mathbb{R}^4 . Además, como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - \dim_{\mathbb{R}}(U) = n^{\circ}$ de ec. implícitas, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) - n^{\circ} \text{ de ec. implícitas} = 4 - 1 = 3$$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ y esos tres vectores son linealmente independientes, tenemos que forman una base.

$$\mathcal{B}_U = \{(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1)\}$$

3. [1 punto] Amplía la base \mathcal{B} a una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 .

Como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) = 4$, tenemos que la base \mathcal{B} ha de tener 4 vectores:

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{array} \right| = -6 \neq 0$$

Por tanto, los 4 vectores son linealmente independientes. Como la dimensión es 4, tenemos que forman base.

$$\mathcal{B} = \{(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

4. [1 punto] Calcula las coordenadas del vector $w = (3, -1, 1, 1)$ respecto de \mathcal{B} . Tomando la base usual,

$$\mathcal{B}_u = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} w &= (3, -1, 1, 1)_{\mathcal{B}_u} \\ &= 3(1, 0, 0, 0) - 1(0, 1, 0, 0) + 1(0, 0, 1, 0) + 1(0, 0, 0, 1) \\ &= a(0, 0, 1, 1) + b(4, 3, 1, -1) + c(2, 0, 2, 1) + d(0, 0, 0, 1) \\ &= (4b + 2c, 3b, a + b + 2c, a - b + c + d)_{\mathcal{B}_u} \\ &= (a, b, c, d)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Por la unicidad de expresión respecto a una base:

$$\begin{cases} 3 = 4b + 2c \longrightarrow c = \frac{3-4b}{2} = \frac{3+\frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{13}{3}}{2} = \frac{13}{6} \\ -1 = 3b \longrightarrow b = -\frac{1}{3} \\ 1 = a + b + 2c \longrightarrow a = 1 - b - 2c = 1 + \frac{1}{3} - \frac{13}{3} = -3 \\ 1 = a - b + c + d \longrightarrow d = 1 - a + b - c = 1 + 3 - \frac{1}{3} - \frac{13}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto,

$$w = (3, -1, 1, 1)_{\mathcal{B}_u} = \left(-3, -\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, \frac{13}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

5. [1 punto] Calcula la dimensión de $U+W$. Comprueba si dicha suma es directa. $\mathcal{B}_U = \{(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1)\}$ base de U . Calculamos ahora \mathcal{B}_W una base de W .

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{ya que} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por tanto, ambos vectores son linealmente independientes. Como además son sistema generador, forman base.

$$\mathcal{B}_W = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$U + W = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\})$$

Veamos cuáles de ellos son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, tenemos que los primeros 4 vectores son linealmente dependientes. Como pertenecen a \mathbb{R}^4 , no puede haber 5 vectores linealmente independientes, por lo que el 5º vector será linealmente dependiente.

$$U + W = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1, 1), (4, 3, 1, -1), (2, 0, 2, 1), (1, 0, 1, 1)\})$$

Como son linealmente independientes y forman sistema generador, forman base. Por tanto,

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 4 \implies U + W = \mathbb{R}^4$$

Para ver si es directa o no, necesito calcular $U \cap W$.

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1$$

Como $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1 \neq 0 \implies U \cap W \neq \{0\}$. Por tanto, la suma no es directa.

6. [1 punto] Calcula unas ecuaciones cartesianas de $U + W$ y de $U \cup W$.

Como $U + W = \mathbb{R}^4$, tenemos que no tiene ecuaciones cartesianas. Para calcular las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$, calculo primero las de W .

Sea $(x, y, z, t) \in W$. Este debe ser linealmente dependiente de los elementos de su base, luego:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 2 & z \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = z - 2y - x = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & t \end{vmatrix} = t - 2y - x = 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} W &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x + 2y = z \\ z = t \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que las ecuaciones cartesianas de la intersección son:

$$\begin{aligned} U \cap W &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x - 2z + 2t = 0 \\ x + 2y = z \\ z = t \end{array} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = z \\ z = t \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ejercicio 2. [4 puntos] Discute y resuelve, cuando sea posible, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z + t + u = 1 \\ x + y + az + t + u = -1 \\ x + y + z + t + au = 1 \end{cases}$$

Sea A la matriz de coeficientes del sistema, y $A|C$ la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad A|C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1$:

$$rg(A) = 1 \quad rg(A|C) = 2$$

Como $rg(A) \neq rg(A|C)$, por el Teorema de Rouché-Frobenius, tenemos que se trata de un **Sistema Incompatible (SI)**.

- Si $a \neq 1$:

$$rg(A) = 3 \quad rg(A|C) = 3$$

Como $rg(A) = rg(A|C) < n^{\circ}$ de incógnitas, por el Teorema de Rouché-Frobenius, tenemos que se trata de un **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)**.

$$n^{\circ} \text{ parámetros} = n^{\circ} \text{ incógnitas} - rg(A) = 5 - 3 = 2$$

Resuelvo por tanto para $a \neq 1$ con el método de Cramer. Sea $t, u \in \mathbb{R}$ los dos parámetros libres. El sistema de Cramer queda:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 - t - u \\ x + y + az = -1 - t - u \\ x + y + z = 1 - t - au \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + 1 - 1 - a^2 - 1 = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$$

Por tanto, por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - t - u & 1 & 1 \\ -1 - t - u & 1 & a \\ 1 - t - au & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a - 1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} u(a - 1) & 0 & 0 \\ -1 - t - u & 1 & a \\ 1 - t - au & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a - 1)^2} = \frac{u(a - 1)(1 - a)}{-(a - 1)^2} = \frac{u(a - 1)^2}{(a - 1)^2} = u$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1-t-u & 1 \\ 1 & -1-t-u & a \\ 1 & 1-t-au & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = \dots = \frac{-a^2u - at - au + a + t + 2u + 1}{a-1}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1-t-u \\ 1 & 1 & -1-t-u \\ 1 & 1 & 1-t-au \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1-t-u \\ 1 & 1 & -1-t-u \\ 0 & 0 & 2+u(1-a) \end{vmatrix}}{-(a-1)^2} = -\frac{(a-1)(2+u(1-a))}{(a-1)^2} = \\ &= -\frac{2+u(1-a)}{a-1} = \frac{2+u(1-a)}{1-a} = \frac{1}{1-a} + u \end{aligned}$$